NIEKTORÉ POKRYTIA GUĽOVEJ PLOCHY ZHODNÝMI KRUHMI

ERNEST JUCOVIČ, Prešov

1. Nech N zhodných kruhov celkom pokrýva jednotkovú guľovú plochu (N je prirodzené číslo). Nazvime hustotou pokrytia guľovej plochy týmito N kruhmi (označíme d_N) podiel zo súčtu sférických obsahov týchto N kruhov ku povrchu guľovej plochy. L. Fejes-Tóth [1] predkladá problém: K danému číslu N určiť sférický polomer r_N, a to rozmiestnenie stredov uvažovaných N kruhov s polomerom r_N na guľovej ploche, aby príslušná hustota pokrytia d_N bola minimálna.

Pre $N = 1, 2, 3, 4, 6, 12$ je riešenie problému jednoduché. (Pozri K. Schütte [2].) Pre $N = 5, 7$ našiel riešenie Schütte [2] pomocou grafov, ktoré — na rozdiel od Fejes-Tóthom konštruovaného grafu — obsahujú aj hrany menšie ako r_N. V tej istej práci prináša Schütte aj odhad hornej hranice minimálnej hodnoty d_8. Pre $N > 8$ — s výnimkou $N = 12$ — nielen že doteraz nie je podané riešenie, ale v literatúre nie sú spomínané ani „dosť dobré" umiestnenia stredov pokrývajúcich kruhov, ktoré by poskytovali odhady horných hraníc minimálnych hustôt pokrytia guľovej plochy príslušným počtom kruhov.

V ďalších riadkoch ukážeme také „dobré" pokrytia guľovej plochy 9, 10, 14 a 20 kruhmi. Numerické výpočty sa vykonajú prostriedkami elementárnej sférickej geometrie a neuvádzame ich. Na obrázkoch sú znázornené stredové priemety príslušných grafov, zostrojených podľa spomínanej práce Schütteho. (Teda čierne body sú stredy pokrývajúcich kruhov, biele body sú stredy kružníc opísaných trojuholníkom z trojuholníkovej siete, natiahnutej na stredoch pokrývajúcich kruhov; hrany grafu dostaneme, keď vrcholy trojuholníkov zo siete spojíme s príslušnými stredmi opísaných kružníc.)

Predom ešte pripomeňme (častejšie to použijeme), že a) sférický polomer pokrývajúcich kruhov r_N a k nemu patriaca hustota pokrytia d_N sú vo vzťahu

$$d_N = \frac{N}{2}(1 - \cos r_N), \tag{1}$$

b) dolná hranica hustoty pokrytia je podľa [2] daná nerovnosťou

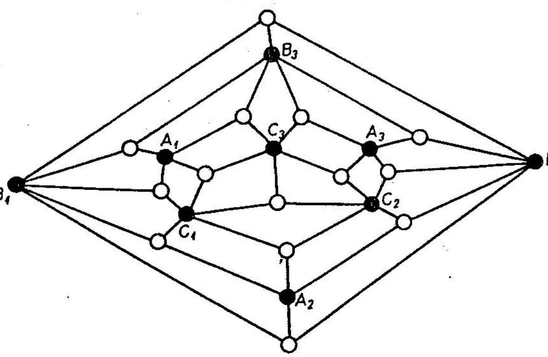
$$d_N \geqq \frac{N}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{cotg} \frac{N}{N-2} \cdot \frac{\pi}{6}\right). \tag{2}$$

2. $N = 9$. Nech A_1, A_2, A_3 sú vrcholy rovnostranného trojuholníka, vpísaného do hlavnej kružnice h. Nech ležia body B_1, B_2, B_3 na tej istej polguli oddelenej kruhom h a nech sú vrcholmi zhodných rovnoramenných trojuholníkov nad základňami $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_2A_3}$, $\widehat{A_3A_1}$, ktorých ramená majú $68°58'$. Obdobne zostrojme body C_1, C_2, C_3 na opačnej polguli. Zhodné kruhy so stredmi v bodoch A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2, 3)$ a s polomerom

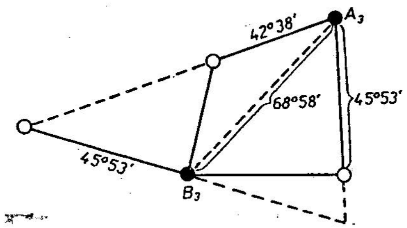
$$r_9 \doteq 45°53'$$

pokrývajú guľovú plochu, pričom hustota pokrytia je

$$d_9 \doteq 1{,}367.$$



Obr. 1.



Obr. 2.

Graf (obr. 1) obsahuje 12 zhodných častí, z nich jedna je znázornená na obr. 2. Jeho hrany sú dvojaké, $45°53'$ a $42°38'$. Hustota pokrytia pri našom umiestnení je o 10 % väčšia ako dolná hranica určená vzťahom (2).

3. $N = 10$. Nech je A_1A_2 priemer gule. Nech sú $B_1B_2B_3B_4$, $C_1C_2C_3C_4$ dva zhodné štvorce, vpísané do takých rôznych kružníc guľovej plochy, ktoré obe majú body A_1, A_2 za póly. Body C_1, C_2, C_3, C_4 nech sú umiestnené tak, aby $\widehat{B_1C_1} = \widehat{B_2C_1} = \widehat{B_2C_2} = \widehat{B_3C_2} = \widehat{B_3C_3} = \widehat{B_4C_3} = \widehat{B_4C_4} = \widehat{B_1C_4}$; nech tieto oblúky sú zhodné so sférickým polomerom kružníc, na ktorých body B_i, resp. C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ ležia. (Tie oblúky majú asi $65°32'$.) Potom minimálny

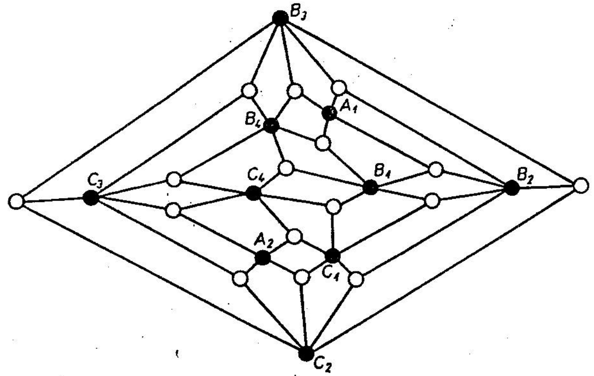
polomer zhodných kruhov, ktoré majú stredy v bodoch A_1, A_2, B_i, C_i a pokrývajú guľovú plochu, je

$$r_{10} \doteq 42°19'.$$

Príslušná hustota pokrytia je

$$d_{10} \doteq 1{,}302.$$

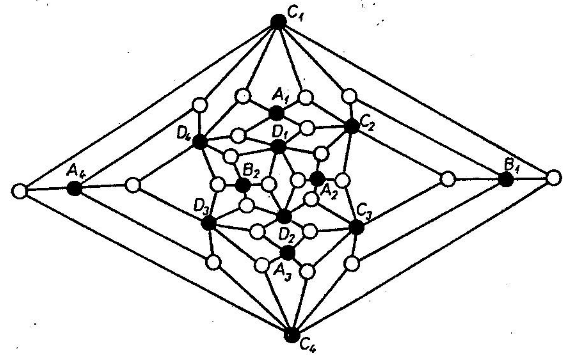
Sieť sférických trojuholníkov s vrcholmi v bodoch A_1, A_2, B_i, C_i sme volili tak, že všetky sú zhodné s trojuholníkom $A_1B_1B_2$, — preto aj všetky hrany



Obr. 3.

grafu (obr. 3) sú zhodné s polomerom pokrývajúcich kruhov. Hustota uvedeného pokrytia je o 5 % väčšia ako dolná hranica podľa vzťahu (2).

4. $N = 14$. Nech sú A_1, A_2, A_3, A_4 vrcholy štvorca, vpísaného do hlavnej kružnice h, ktorej pólmi sú body B_1, B_2. Na polguli hB_1 (t. j. na tej polguli ohraničenej kružnicou h, na ktorej leží bod B_1) nech sú body C_1, C_2, C_3, C_4 hlavné vrcholy zhodných rovnoramenných trojuholníkov so základňami $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_2A_3}$, $\widehat{A_3A_4}$, $\widehat{A_4A_1}$, nech ramená týchto trojuholníkov sú zhodné so vzdiale-



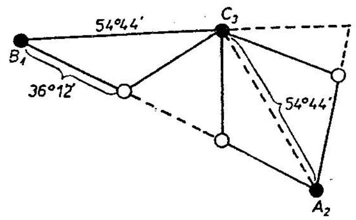
Obr. 4.

nosťou bodov C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ od bodu B_1 (t. j. 54°44′). Obdobným postupom zostrojme na opačnej polguli body D_1, D_2, D_3, D_4. Kruhy, ktorých stredmi sú body B_1, B_2, A_i, C_i, D_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ a majú polomer

$$r_{14} \doteq 36°12',$$

pokrývajú guľovú plochu. Príslušná hustota pokrytia je

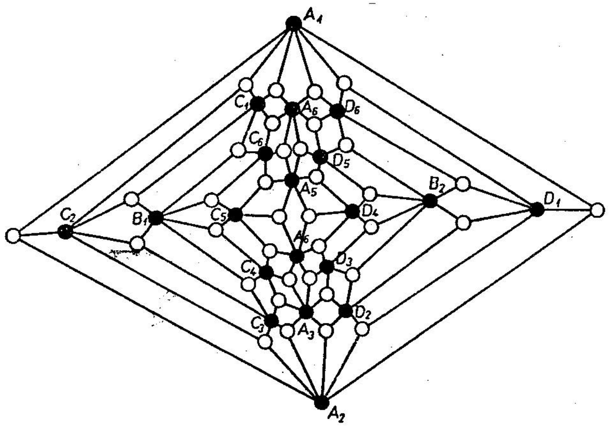
$$d_{14} \doteq 1,352.$$



Obr. 5.

Táto hustota je o 10 % väčšia ako dolná hranica d_{14}, daná vzťahom (2). Všetky hrany grafu (obr. 4) sú zhodné s polomerom pokrývajúcich kruhov. Celý graf obsahuje 16 zhodných častí, z nich jedna je znázornená na obr. 5.

5. $N = 20$. Nech sú $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ vrcholy pravidelného šesťuholníka, vpísaného do hlavnej kružnice h, ktorej pólmi sú body B_1, B_2.



Obr. 6.

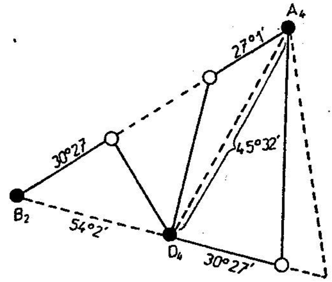
Na polguli hB_1 nech sú body $C_1, C_2, \ldots, C_6$ hlavné vrcholy zhodných rovnoramenných trojuholníkov so základňami $\widehat{A_1A_2}, \widehat{A_2A_3}, \widehat{A_3A_4}, \widehat{A_4A_5}, \widehat{A_5A_6}, \widehat{A_6A_1}$, ktorých ramená merajú 45°32′. Obdobným postupom zostrojme body

$D_1, D_2, \ldots, D_6$ na opačnej polguli. Kruhy, ktorých stredy sú body B_1, B_2, A_i, C_i, D_i $(i = 1, \ldots, 6)$ a majú polomer

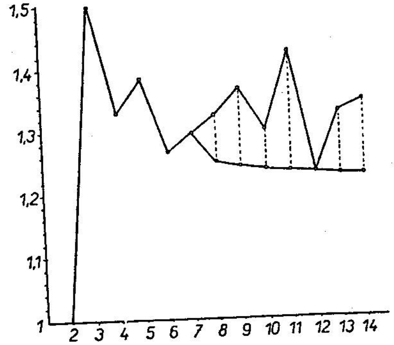
$$r_{20} \doteq 30°27',$$

pokrývajú guľovú plochu, pričom hustota pokrytia je

$$d_{20} \doteq 1,379.$$



Obr. 7.



Obr. 8.

Táto hustota je o 13 % väčšia ako dolná hranica pre d_{20}, daná vzťahom (2). Hrany grafu (obr. 6) sú dvojaké, 30°27′ a 27°1′. Celý graf sa skladá z 24 zhodných častí, z nich jedna je znázornená na obr. 7.

6. Záverom na obr. 8 je ukázaná závislosť d_N od N. Hornou čiarou sú spojené známe minimálne hodnoty d_N alebo dolné hranice zo vzťahu (2); dolnou čiarou sú spojené odhady minimálnych hodnôt d_N, uvedené v predchádzajúcich riadkoch a u Schütteho. Odhadovú hodnotu d_N pre $N = 11,13$ sme vzali tak, že sme jednoducho ku známym konfiguráciam desiatich a dvanástich kruhov pridali ešte jeden kruh.

LITERATÚRA

[1] Fejes-Tóth L., *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum.* Berlin—Göttingen—Heidelberg 1953.

[2] Schütte K., Überdeckungen der Kugel mit höchstens acht Kreisen. Math. Annalen 129 (1955), 181—186.

Došlo 7. 9. 1959.

Katedra matematiky a fyziky
Pedagogického inštitútu v Prešove

НЕКОТОРЫЕ ПОКРЫТИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ РАВНЫМИ КРУГАМИ

ЭРНЕСТ ЮЦОВИЧ

Выводы

В статье показаны расположения центров 9, 10, 14 и 20 кругов, которые позволяют сверху оценить минимальную плотность покрытия сферической поверхности этим количеством кругов.

На рисунках — центральные проекции графов, построенных по Шютте (2).

Расположения центров, величины радиусов r_N покрывающих кругов и плотности покрытия d_N:

Центры 9 кругов расположены на 3 параллельных окружностях по 3 точки; $r_9 \doteq 45°53'$, $d_9 \doteq 1,367$.

Центры 10 кругов — вершины 2 равных квадратов, описанные окружности которых лежат в параллельных плоскостях, — и полюсы этих окружностей; $r_{10} \doteq 42°19'$, $d_{10} \doteq 1,302$.

Центры 14 кругов — вершины 3 квадратов, описанные окружности которых лежат в параллельных плоскостях, — и полюсы этих окружностей; $r_{14} \doteq 36°12'$, $d_{14} \doteq 1,352$.

Центры 20 кругов — вершины 3 правильных 6-угольников, описанные окружности которых лежат в параллельных плоскостях, — и полюсы этих окружностей; $r_{20} \doteq 30°\,27'$, $d_{20} \doteq 1,379$.

EINIGE ÜBERDECKUNGEN DER KUGELFLÄCHE MIT KONGRUENTEN KREISEN

ERNEST JUCOVIČ

Zusammenfassung

Gezeigt werden Lagerungen der Mittelpunkte von 9, 10, 14 und 20 kongruenten Kreisen, die Abschätzungen der oberen Schranken der minimalen Überdeckungsdichten bieten. Auf den Abbildungen sind die Zentralprojektionen der nach Schütte [2] konstruierten Graphen.

Die Lagerungen der Mittelpunkte der überdeckenden Kreisen, ihre Radien r_N und die dazugehörenden Dichten d_N sind:

Die Mittelpunkte der 9 Kreisen liegen zonal per 3 Punkte auf einem Großkreise und zwei Breitenkreise, deren Ebenen paralel sind; $r_9 \doteq 45°53'$, $d_9 \doteq 1,367$.

Die Mittelpunkte der 10 Kreisen sind Ecken zweier kongruenten Quadraten, deren Umkreise in paralelen Ebenen liegen, – und weiter die 2 Pole der Umkreise; $r_{10} \doteq 42°19'$, $d_{10} \doteq 1,302$.

Die Mittelpunkte der 14 Kreisen sind Ecken dreier Quadraten mit paralelen Umkreisebenen und die 2 Pole dieser Umkreise; $r_{14} \doteq 36°12'$, $d_{14} \doteq 1,352$.

Die Mittelpunkte der 20 Kreisen sind Ecken dreier regulären Sechsecken mit paralelen Umkreisebenen und die 2 Pole der Umkreise; $r_{20} \doteq 30°27'$, $d_{20} \doteq 1,379$.